Clase 14: Continuación.

Peter Hummelgens

7 de enero de 2007

Encontramos en la clase anterior lo siguiente. Si $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ es un *s.o.* en $L^2(a;b)$ (los $\phi_i \neq 0$) y $f \in L^2(a;b)$ arbitrario, entonces

$$f_{proy} = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \ \text{ con } \ c_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \ \ (n = 1, \cdots, N), \tag{1}$$

es la proyección ortogonal de f sobre el subespacio lineal de M de $L^2(a;b)$ generado por $\phi_1, \cdots, \phi_N$. El espacio M es $N-$dimensional y consiste en todas las combinaciones lineales

$$\psi = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \ \text{ con } \ a_n \in \mathbb{C} \ \ (\psi \in M). \tag{2}$$

Veamos algunas consecuencias de este resultado.

Llamando como antes $g := f - f_{proy} \overset{(1)}{=} f - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}\phi_n$, tenemos $f = g + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}\phi_n$ donde g es perpendicular con cada ϕ_n (porque $g \perp M$), por lo tanto perpendicular con todos los términos $\frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}\phi_n$, ortogonales entre sí. Ahora con Pitágoras

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \|\phi_n\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \|\phi_n\|^2$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \ \sum_{n=1}^{N} \frac{|(f,\phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2, \ \ f \in L^2(a;b) \tag{3}$$

lo que es la <u>desigualdad de Bessel</u> (observe que en (3) la desigualdad se convierte en una igualdad cuando $f \in M$, es decir, $f_{proy} = f$).

Además, para $\psi \in M$ arbitraria dada por (2), tenemos $f - f_{proy} = g \perp (f_{proy-\psi})$ (ya que $g \perp M$, $f_{proy} - \psi \in M$), luego

$$f - \psi = (f - f_{proy}) + (f_{proy} - \psi) \ \ \overset{Pitágoras}{\Longrightarrow} \ \ \|f - \psi\|^2 = \|f - f_{proy}\| + \|f_{proy} - \psi\|^2.$$

de donde vemos que para $\phi \in M$ la norma cuadrado $\|f-\psi\|^2$ alcanza su valor más pequeño cuando $\psi = f_{proy}$, es decir, cuando $a_n = c_n$; $n = 1, \cdots, N$. En otras palabras

$$\left.\begin{array}{l} \|f - \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\phi_n\| \text{ se \underline{minimiza} cuando los } a_n \text{ son precisamente} \\ \text{los coeficientes de fourier } c_n \text{ de } f \text{ con respecto al } s.o.\ \{\phi_1, \cdots, \phi_N\}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

es decir, " la distancia más corta entre f y una $\psi \in M$ es la distancia <u>ortogonal</u> entre f y M", un resultado que luce evidente geométricamente. La magnitud de la norma $\|f-\psi\|$ mide "la cercanía" de f y ψ como elemento de $L^2(a;b)$: mientras más pequeño $\|f-\psi\|$, mejor <u>ψ se aproxima en norma a f</u>. Podemos entonces reformular (4) diciendo: La mejor aproximación en norma de $f \in L^2(a;b)$ por un elemento de M

$$\left.\begin{array}{l} \text{es } \psi = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n\phi_n \text{ donde los } c_n \text{ son los} \\ \text{coeficientes de Fourier de } f \text{ con respecto al } s.o.\ \{\phi_1, \cdots, \phi_N\}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Ejemplo 1. *Se pide hallar los valores $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ que minimicen*

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(x) - \alpha - \beta x|^2 dx. \tag{6}$$

Podemos ubicar este problema en el contexto de la aproximación en $L^2(-\pi;\pi)$. Las funciones $\phi_1(x) = 1$, $\phi_2(x) = x$ evidentemente pertenecen a $L^2(-\pi,\pi)$ y

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(x)\phi_2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0 \implies \phi_1 \perp \phi_2,$$

es decir, $\{\phi_1, \phi_2\}$ es un s.o. en $L^2(-\pi,\pi)$. Además $f(x) = \operatorname{sen}(x)$; $-\pi \leq x \leq \pi \implies f \in L^2(-\pi,\pi)$, y podemos escribir (6) como

$$\psi(\alpha, \beta) = \|f - \alpha\phi_1 - \beta\phi_2\|^2$$

y por (4) (o (5)) $\psi(\alpha,\beta)$ se minimiza cuando α, β son los coeficientes de Fourier de $\operatorname{sen}(x)$ *con respecto al s.o. ϕ_1, ϕ_2. Entonces con (1),*

$$\alpha = \frac{(f,\phi_1)}{\|\phi_1\|^2} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \frac{0}{2\pi} = 0,$$

$$\beta = \frac{(f,\phi_2)}{\|\phi_2\|^2} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(x)dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 dx} = \frac{3}{\pi^2}.$$

La función $f_{proy}(x) = \frac{3}{\pi^2}x$ *es la proyección ortogonal de* $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *sobre el subespacio lineal generado por* 1, x, *o* $\frac{3}{\pi^2}x$ *es la mejor aproximación en norma de sen*(x) *por una función de la forma* $\alpha + \beta x$.

Verifiquemos la desigualdad de Bessel:

$$\frac{|(f,\phi_1)|^2}{\|\phi_1\|^2} + \frac{|(f,\phi_2)|^2}{\|\phi_2\|^2} = 0 + \frac{(2\pi)^2}{2\pi^2/3} = \frac{6}{\pi} \leq \|f\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^2(x)dx = \pi.$$

Más ejemplos de este tipo están en la guía del Profesor Hummelgens.

Con el concepto de la norma en $L^2(a;b)$ podemos ahora definir los conceptos de convergencia de sucesiones y series infinitas en $L^2(a;b)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^2(a;b)$ y $f \in L^2(a;b)$. Entonces definimos

$$f_n \longrightarrow f \ \text{ si } \ n \to \infty \ \ \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \ \ \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0. \tag{7}$$

Expresamos $f \xrightarrow{\|\ \|} f$ diciendo que <u>f_n converge a f en la norma</u>. Equivalentemente

$$f_n \xrightarrow{\|\ \|} f \ \text{ si } \ n \to \infty \ \ \Longleftrightarrow \ \ \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \longrightarrow 0 \ \text{ si } n \to \infty \tag{8}$$

(observe que $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$ si y solo si $\|f_n - f\|^2 \longrightarrow 0$). De (8) vemos que la convergencia en norma están involucrados <u>simultáneamente</u> todos los valores de $f(x)$ y de los $f_n(x)$ sobre todo el intervalo $(a;b)$ en contraste con la <u>convergencia puntual</u> $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ si $n \to \infty$ que requiere que para cada $x \in (a;b)$ <u>por separado</u> (es decir, puntualmente) la sucesión de <u>números</u> $f_n(x)$ converge al <u>número</u> $f(x)$. <u>Las dos nociones de convergencia</u> no se implican mutuamente (¡construye ilustraciones de esta afirmación!).

La convergencia en norma de una serie infinita se define como la convergencia en norma de la sucesión de sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{N} f_n = f \ \text{ en norma } \ \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \ \sum_{n=1}^{N} f_n \xrightarrow{\|\ \|} f \ \text{ si } \ N \to \infty. \tag{9}$$

Sea un *s.o.* infinta $\phi_1, \cdots, \phi_n, \cdots$ (con todo $\phi_i \neq 0$) y se $f \in L^2(a;b)$. Aplicando la desigualdad de Bessel tenemos para todo N

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|(f,\phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2,$$

luego tomando el límite para $N \to \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,\phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2, \quad f \in L^2(a;b) \tag{10}$$

(la desigualdad de Bessel en forma más general). De (10) se puede demostrar que

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,\phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2}\phi_n \text{ converge en norma para todo } f \in L^2(a;b) \\ \text{la suma de la serie es } f_{proy}, \underline{\text{la proyección}} \\ \text{ortogonal de } f \text{ sobre el subespacio lineal } M \subseteq L^2(a;b) \text{ generado por los } \phi_n. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Desde luego existe la posibilidad de que los ϕ_n no generan todo $L^2(a;b)$, es decir M no es $L^2(a;b)$ completo y los ϕ_n forman una base de M pero no de $L^2(a;b)$ (para generar todo $L^2(a;b)$ faltarían más vectores (funciones) de base). Definimos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{los } \phi_1, \cdots, \phi_n, \cdots \text{ forman un sistema ortogonal } \underline{\text{completo}} \text{ en } L^2(a;b) \\ \overset{def.}{\Longleftrightarrow} M = L^2(a;b), \text{ es decir, cada } f \in L^2(a;b) \text{ es de la forma} \\ f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \text{ donde los } c_n \text{ son los coeficientes de Fourier} \\ c_n = \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \text{ de } f \text{ con respecto al } s.o.. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Que los c_n son los coeficientes de Fourier se puede verificar con el siguiente argumento que ya vimos antes. Si $f = \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m\phi_m$ (en norma), entonces para n fijo arbitrario,

$$(f,\phi_n) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m\phi_m, \phi_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(\phi_m,\phi_n) = c_n(\phi_n,\phi_m) = c_n\|\phi_n\|^2$$

porque $(\phi_m,\phi_n) \neq 0$ para $n \neq m$. Entonces

$$c_n = \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}$$

como queremos. Puede demostrarse el siguiente criterio:

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1, \cdots, \phi_n, \cdots \text{ es un } s.o. \ \underline{\text{completo}} \Longleftrightarrow \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,\phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} = \|f\|^2 \text{ para todo } f \in L^2(a;b).\end{array}\right\} \tag{13}$$

La igualdad en (13) se llama la <u>igualdad de Parseval</u>: para un *s.o.* <u>completo</u> la desigualdad de Bessel (9) se convierte en una igualdad. Partiendo de un *s.o.* $\phi_1, \cdots \phi_n$ tenemos para todo $f \in L^2(a;b)$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(f,\phi_n)^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2$$

y agregando más vectores de base $\phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \cdots$ la suma a la izquierda aumenta (siempre siendo $\leq \|f\|^2$) hasta que alcanza su valor máximo posible $\|f\|^2$ cuando "ya no se puede agregar un vector ϕ más que sea perpendicular con todos los ϕ anteriores".

Analogía en $\mathbb{R}^k$: elige $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^k$ ($\vec{v}_1 \neq \vec{0}$), luego $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$ ($0 \neq v_2$), $\cdots$ etc, y luego de agregar el último $\vec{v}_k$ perpendicular a $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{k-1}$ (todos mutuamente ortogonales), se ha obtenido una base $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^k$ y cada $v \in \mathbb{R}^k$ puede escribirse como combinación lineal $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k$ (complete el razonamiento para obtener la "fórmula de Parseval´´ en este caso). Observe que podemos escribir (13) como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\phi_n|^2 \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2$.

Los *s.o.* concretos que ya encontramos en la resolución del PAA resultan ser completos. Es decir, resumiendo:

(I) $\left\{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x : n = 1, 2, 3, \cdots\right)\right\}$ es un *s.o.* completo en $L^2(0;\ell)$, es decir, cada $f \in L^2(0;\ell)$ tiene un desarrollo $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ (en norma), donde $\phi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$; $0 \leq x \leq \ell$. Tenemos

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx; \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

y

$$\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad f \in L^2(0,\ell) \quad \text{(Parseval)}.$$

Verifiquemos las dos últimas fórmulas. Tenemos $\|\phi_n\|^2 = \int\limits_0^{\ell} \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{\ell}{2}$, luego con (1)

$$c_n = \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Además $\|f\|^2 = \int_0^\ell |f(x)|^2 dx$, luego con (13)

$$\int_0^\ell |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{|(f,\phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} = \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \|\phi_2\|^2 = \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\ell} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2,$$

listo.

(II) $\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) : n = 1, 2, 3, \cdots\right\}$ es un *s.o.* completo en $L^2(0;\ell)$, es decir cada $f \in L^2(0,\ell)$ tiene un desarrollo $f = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n$ (en norma), donde $\psi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$; $0 \le x \le \ell$. Tenemos

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx; \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

y

$$\frac{1}{\ell} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx = \frac{|c_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2, \quad f \in L^2(0;\ell) \ \ (Parseval).$$

Verifiquemos las dos ultimas fórmulas. Tenemos $\|1\|^2 = \int_0^\ell dx = \ell$, por lo tanto

$$\frac{c_0}{2} = \frac{(f,1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x) dx \quad \Longrightarrow \quad c_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) dx$$

y además

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^\ell \cos^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{\ell}{2} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Además con (13) y $\|\psi_n\|^2 = \frac{\ell}{2}$,

$$\int_0^\ell |f(x)|^2 dx = \frac{|c_0|^2}{4}\ell + \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \|\psi_n\|^2 = \frac{|c_0|^2}{4} + \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\ell} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx = \frac{|c_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2.$$

listo.

(III) $\left\{1,\ \psi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),\ \phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) : n = 1, 2, 3, \cdots\right\}$ es un *s.o.* completo en $L^2(-\ell, \ell)$, es decir cada $f \in L^2(-\ell, \ell)$ tiene un desarrollo

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n + b_n \phi_n] \text{ en norma,}$$

y tenemos

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

y

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad f \in L^2(-\ell, \ell) \ \text{(Parseval)},$$

(¡Verifique!).

(IV) $\left\{ X_n(x) = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \right\}$ es un *s.o.* completo en $L^2(-\ell; \ell)$, es decir, cada $f \in L^2(-\ell, \ell)$ tiene un desarrollo

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X_n \ \text{(en norma)},$$

y tenemos

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

y

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

(¡Verifique!).

1. Terminología:

La serie de Fourier en (I) se llama serie de Fourier de senos de $f(x)$ en $(0; \ell)$, la serie en (II) se llama serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en $(a; \ell)$, la serie en (III) se llama serie de Fourier trigonométrica de $f(x)$ en $(-\ell, \ell)$ y la serie (IV) se llama serie de Fourier compleja de $f(x)$ en $(-\ell; \ell)$. Más generalmente, para $\phi_1, \cdots, \phi_n, \cdots$ un *s.o.* completo en $L^2(a; b)$, cada $f \in L^2(a; b)$ tiene un desarrollo

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \text{ en norma,}$$

llamado serie de Fourier de $f(x)$ con respecto al *s.o.* $\{\phi_n\}$

Observación 1. *Si $f \in L^2(a; b)$, entonces podemos aplicar ambas series de Fourier de (I) y (II) (depende del problema en cuestión cual de los dos nos conviene). En cambio, en un intervalo simétrico $(-\ell; \ell)$ la serie de Fourier de una $f \in L^2(-\ell; \ell)$, consiste en general de términos con cosenos y senos simultáneamente (salvo en caso cuando $f(x)$ es par o impar, ver la proxima clase).*